

Editor: Călin Vlasie

Tehnoredactare: Gabriel Popa, Antonio Păsărică

Coperta: Andrei Mănescu

Prepress: Viorel Mihart

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
10 ani de olimpiade balcanice ale juniorilor / D. Brânzei,
D. Șerbănescu, D. Marinescu, ... – Pitești: Paralela 45, 2007
ISBN 978-973-47-0066-0

I. Brânzei, Dan
II. Șerbănescu, Dinu
III. Marinescu, Dan Ștefan

51(075.33)(076)

Copyright © Editura Paralela 45, 2007

DAN BRÂNZEI
GABRIEL POPA
DAN ȘTEFAN MARINESCU

DINU ȘERBĂNESCU
IOAN ȘERDEAN
VASILE ȘERDEAN

10 ANI DE OLIMPIADE BALCANICE ALE JUNIORILOR

PARALELA 45



Rece nepotriviri. Rostul este prea important și prea înfășurat de doriri de bine, așa că adesea generează vremelnice neadaptări. Este corect să trecem aici peste fricțiuni și să evidențiem o esență a acestei mișcări: **autoalimentarea**. Ne referim la faptul că olimpicii de o generație, două, trei sau chiar mai multe, pun umăr și suflet, timp și competențe, răbdare și scânteie spre binele acțiunii. Nu plângem prea tare că, firese, mulți dintre acești campioni veterani s-au împrăștiat în lumea largă sau au urcat în cercetări matematice de vârf: de unde sunt, aduc adesea ajutor.

Spre a evita jumătăți de înțelesuri, să zicem că sunt buni fiindcă au stofă bună. Dar și dârzenia de a deveni mai buni. Cel mai adesea au și profesori cu har. Am văzut profesori de-ai lor venind pe gratis la pregătiri sau la baraje: o noapte pe un tren, o zi de muncă lungită cu discuții prietenești, altă noapte pe alt tren spre a fi înapoi la obligații școlare cotidiene.

Întrebarea este dacă sunt mulți sau puțini. Administrativ, vorbim de 25 în fiecare an. Știm că, dacă ar fi puteri și bani, ar fi mai mulți. Cu regrete, respectăm regulile jocului.

Primul rost al cărții prezente este de a oferi șansa și altora. Independent de sigla editorială de pe copertă, cartea este continuare firească pentru GM, RecMat, RMT, RMC și alte surate ale lor.

martie, 2007, Iași

Prof. univ. dr. Dan Brânzei

Cuprins

Prefață	5
Cuprins	7
Capitolul I	
Subiectele propuse la OBMJ	9
Capitolul II	
Probleme aflate în atenția juriului.....	16
Capitolul III	
Barajele pentru selectarea lotului român participant la OBMJ	28
Capitolul IV	
Soluții	51
Istoricul participărilor elevilor români la OBJM.....	163
Bibliografie	167

Capitolul 1

Subiectele propuse la OBMJ

1.1. Prima OBMJ – Belgrad, Iugoslavia, iunie 1997

1. În interiorul sau pe laturile unui pătrat de latură 1 se consideră nouă puncte oarecare. Să se arate că putem alege trei dintre aceste puncte, astfel încât aria triunghiului determinat de ele să nu depășească $\frac{1}{8}$.

Bulgaria

2. Dacă $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = k$, să se calculeze în funcție de k valoarea expresiei $\frac{x^8 + y^8}{x^8 - y^8} + \frac{x^8 - y^8}{x^8 + y^8}$.

Cipru

3. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC , iar D , E mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$. Notăm cu K și L punctele de intersecție ale dreptei DE cu BI , respectiv CI . Să se arate că $AI + BI + CI > BC + KL$.

Grecia

4. În triunghiul ABC notăm cu a , b , c , R lungimile laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, respectiv raza cercului circumscris. Dacă $R(b + c) = a\sqrt{bc}$, stabiliți natura triunghiului.

România

1.2. A doua OBMJ – Atena, Grecia, iunie 1998

5. Demonstrați că numărul $N = \underbrace{11\dots1}_{1997 \text{ de } 1} \underbrace{22\dots2}_{1998 \text{ de } 2} 5$ este pătrat perfect.

Iugoslavia

6. Fie pentagonul $ABCDE$ în care $AB = AE = CD = 1$, $m(\angle ABC) = m(\angle DEA) = 90^\circ$, iar $BC + DE = 1$. Calculați aria pentagonului.

Grecia

7. Găsiți toate perechile (x, y) de numere întregi pozitive cu proprietatea că $x^y = y^x$.

Albania

8. Folosind doar trei cifre, se pot construi 16 numere de trei cifre astfel încât să nu existe două dintre ele care să dea același rest la împărțirea prin 16?

Bulgaria

1.3. A treia OBMJ – Plovdiv, Bulgaria, iunie 1999

9. Fie a, b, c, x, y numere reale distincte nenule astfel încât

$$a^3 + ax + y = b^3 + bx + y = c^3 + cx + y = 0.$$

Să se arate că $a + b + c = 0$.

Cipru

10. Pentru $n = 0, 1, 2, \dots, 1999$, considerăm numerele $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$. Găsiți cel mai mare divizor comun al numerelor $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{1999}$.

România

11. Se consideră un pătrat S de latură 20. Fie M o mulțime formată din cele patru vârfuri ale pătratului și încă 1999 de puncte interioare lui S . Demonstrați că există un triunghi cu vârfurile în M , având aria cel mult egală cu $\frac{1}{10}$.

Iugoslavia

12. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ și punctul $D \in (BC)$ cu $BD > CD$. Fie C_1, C_2 cercurile circumscrise triunghiurilor ABD și ACD , $[BB']$ și $[CC']$ diametre în cele două cercuri, iar M mijlocul lui $[B'C']$. Demonstrați că aria triunghiului MBC nu depinde de poziția punctului D .

Grecia

1.4. A patra OBMJ – Ohrid, Macedonia, iunie 2000

13. Fie x, y numere întregi astfel încât $x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000$. Să se arate că $x + y = 10$.

România

14. Găsiți toate numerele naturale nenule n cu proprietatea că $n^2 + 3^n$ este pătrat perfect.

Bulgaria

15. Un semicerc cu diametrul $[EF]$ inclus în latura $[BC]$ a triunghiului ABC este tangent laturilor $[AB]$ și $[AC]$ în Q , respectiv P și fie $\{K\} = EP \cap FQ$. Demonstrați că AK este înălțime în triunghiul ABC .

Albania

16. La un turneu de tenis au participat de două ori mai mulți băieți decât fete. Între fiecare doi participanți se joacă exact câte un meci, care nu se poate încheia la egalitate. Raportul între numărul victoriilor obținute de fete și cel al victoriilor obținute de băieți a fost $\frac{7}{5}$. Câți participanți au fost la acest turneu?

Iugoslavia

1.5. A cincea OBMJ – Nicosia, Cipru, iunie 2001

17. Găsiți toate numerele naturale a, b, c pentru care $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$.

România

18. În triunghiul ABC avem că $m(\angle ACB) = 90^\circ$, iar $AC \neq BC$. Fie $L, H \in [AB]$ astfel încât $\angle ACL \equiv \angle LCB$, iar $CH \perp AB$.

a) Pentru orice punct X (diferit de C) de pe dreapta CL , demonstrați că $m(\angle XAC) \neq m(\angle XBC)$.

b) Pentru orice punct Y (diferit de C) de pe dreapta CH , demonstrați că $m(\angle YAC) \neq m(\angle YBC)$.

Bulgaria

19. Fie triunghiul echilateral ABC și punctele $D \in [AB]$, $E \in [AC]$. Dacă DF, EG (cu $F \in AE, G \in AD$) sunt bisectoare interioare ale unghiurilor

triunghiului ADE, demonstrați că suma ariilor triunghiurilor DEF și DEG este cel mult egală cu aria triunghiului ABC. Când se atinge egalitatea?

Grecia

20. Un poligon convex cu 1415 laturi are perimetrul de 2001 cm. Demonstrați că există trei vârfuri ale poligonului astfel încât triunghiul determinat de ele să aibă aria mai mică decât 1 cm^2 .

Iugoslavia

1.6. A șasea OBMJ – Târgu-Mureș, România, iunie 2002

21. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = BC$) și P un punct pe arcul AB al cercului circumscris triunghiului ce nu conține punctul C. Notăm cu D proiecția lui C pe PB. Demonstrați că $PA + PB = 2PD$.

Grecia

22. Cercurile C_1 și C_2 de raze diferite se intersectează în A și B, astfel încât AB separă centrele O_1 și O_2 . Fie B_1, B_2 punctele diametral opuse lui B în C_1 , respectiv C_2 , iar M mijlocul segmentului $[B_1B_2]$. Pe C_1 și C_2 considerăm punctele M_1 , respectiv M_2 astfel încât $\angle AO_1M_1 \equiv \angle AO_2M_2$, B_1 în interiorul unghiului $\angle AO_1M_1$, iar B este interior unghiului $\angle AO_2M_2$. Demonstrați că $\angle MM_1B \equiv \angle MM_2B$.

Cipru

23. Găsiți numerele naturale N cu proprietățile:

i) N are exact 16 divizori $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{16} = N$;

ii) divizorul cu indicele d_5 este egal cu $(d_2 + d_4) \cdot d_6$.

Bulgaria

24. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, demonstrați că

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Grecia

1.7. A șaptea OBMJ – Izmir, Turcia, iunie 2003

25. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Numărul A este format din $2n$ cifre de 4, iar numărul B este format din n cifre de 8. Să se arate că $A + 2B + 4$ este pătrat perfect.

Macedonia

26. Fie n puncte în plan, oricare trei necoliniare, cu proprietatea (P): oricum am numerota aceste puncte $A_1, A_2, \dots, A_n$, linia frântă $A_1A_2\dots A_n$ nu se autointersectează. Găsiți valoarea maximă a lui n.

România

27. Pe cercul circumscris triunghiului ABC, arcele AB, BC, CA se consideră astfel încât $C \notin AB$, $A \notin BC$, $B \notin CA$ și fie F, D, respectiv E mijloacele acestor arce. Notăm cu G și H punctele de intersecție ale lui DE cu BC, respectiv AC și cu I, J punctele de intersecție ale lui DF cu BC, respectiv AB. Fie M, N mijloacele lui [GH], respectiv [IJ].

a) Găsiți unghiurile triunghiului DMN în funcție de unghiurile triunghiului ABC.

b) Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului DMN și $\{P\} = AD \cap EF$, arătați că O, P, M și N sunt conciclice.

Bulgaria

28. Fie x, y, z numere reale mai mari decât -1. Să se demonstreze că

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2.$$

România

1.8. A opta OBMJ – Novi Sad, Serbia și Muntenegru, iunie 2004

29. Fie x, y numere reale, nu simultan nule. Să se demonstreze că

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Albania

30. Fie ABC un triunghi isoscel, $AC = BC$, M mijlocul segmentului [AC], iar [CH] înălțimea din C. Cercul ce trece prin B, C și M intersectează a doua dreaptă CH în Q. Să se afle raza cercului circumscris triunghiului ABC în funcție de $m = CQ$.

Bulgaria

31. Fie $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $3x + 4y$ și $4x + 3y$ să fie ambele pătrate perfecte. Să se arate că numerele x și y sunt multipli de 7.

Grecia

32. Se consideră un poligon convex cu $n \geq 4$ vârfuri. Descompunem arbitrar poligonul în triunghiuri ale căror vârfuri sunt printre cele ale poligonului, astfel încât oricare două triunghiuri să nu aibă puncte interioare comune. Colorăm cu negru triunghiurile ce au două laturi care sunt și laturi ale poligonului, cu roșu triunghiurile ce au exact o latură care este și latură a poligonului, celelalte triunghiuri lăsându-le albe. Să se demonstreze că numărul triunghiurilor negre este cu 2 mai mare decât numărul triunghiurilor albe.

România

1.9. A noua OBMJ – Veria, Grecia, iunie 2005

33. Găsiți toate numerele $x, y \in \mathbb{N}^*$ pentru care $9(x^2 + y^2 + 1) + 2(3xy + 2) = 2005$.

Cipru

34. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Tangenta în A la cercul circumscris C al acestuia taie BC în P și fie M mijlocul lui [AP]. Dreapta BM intersectează din nou C în R, iar PR taie din nou C în punctul S diferit de R. Demonstrați că $AP \parallel CS$.

România

35. a) Demonstrați că putem găsi 5 puncte în plan pentru care să existe cel puțin 8 triunghiuri dreptunghice cu vârfurile în aceste puncte.

b) Demonstrați că putem găsi 64 de puncte în plan pentru care să existe cel puțin 2005 triunghiuri dreptunghice cu vârfurile în aceste puncte.

Bulgaria

36. Găsiți toate numerele naturale $\overline{abc}$ scrise în baza 10, pentru care $\overline{abc} = abc(a + b + c)$.

Albania

1.10. A zecea OBMJ – Chișinău, Moldova, iunie 2006

37. Dacă numărul întreg $n > 4$ nu este prim, arătați că $2n$ divide $(n - 1)!$.

38. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ și $m(\angle A) < 60^\circ$. Considerăm punctele D, E pe (AC) astfel încât $EB = ED$ și $\angle ABD \equiv \angle CBE$. Bisectoarele

unghiurilor $\angle ACB$ și $\angle BDC$ se întâlnesc în O. Calculați măsura unghiului $\angle COD$.

39. Un număr natural nenul se numește *perfect* dacă suma tuturor divizorilor săi naturali este egală cu dublul numărului. Găsiți toate numerele perfecte n , pentru care $n - 1$ și $n + 1$ sunt ambele prime.

40. Fie n întreg, $n \geq 2$. Dintr-o tablă $2n \times 2n$, unele pătrățele de latură 1 sunt eliminate: două din mijloc de pe linia 2, patru de la mijlocul liniei 3, ..., $2n - 2$ pătrățele de la mijlocul liniilor n și $n + 1$, ..., patru de la mijlocul liniei $2n - 2$ și două de la mijlocul liniei $2n - 1$ (în figură este exemplificat cazul $n = 4$). Care este cel mai mare număr de piese de domino 2×1 care pot fi plasate, fără suprapuneri, pe figura rămasă?

